KTH, Matematik
Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1683,
Differentialekvationer och Transformmetoder (del 2)
4 april 2018

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.
Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta rummet $C([0,1])$ (rummet av alla kontinuerliga, komplexvärda funktioner definierade på intervallet $[0,1]$) med den inre produkten

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

a). Låt W vara delrummet av $C([0,1])$ som spänns upp av funktionerna $u_1(x) = 1$ och $u_2 = x^2$. Bestäm en ON-bas för W.
b). Låt $f(x) = x^3$. Bestäm den funktion (vektor) $u(x)$ i W som minimerar $\|f - u\|$.

Lösning. a). Observera att $\|u_1\| = \langle u_1, u_1\rangle = 1$ och låt $w_1(x) = u_1(x)$. Vidare, låt $w_2' = u_2 - \text{Proj}_{u_1}(u_2) = x^2 - \int_0^1 x^2 dx = x^2 - \frac{1}{3}$ and

$$w_2 = w_2'/\|w_2'\| = \frac{3\sqrt{5}}{2}(x^2 - \frac{1}{3}).$$

Då är w_2 ortogonal mot w_1, båda vektorerna har norm 1, alltså bildar paret (w_1, w_2) en ON bas i W.
b). Den vektor $u(x)$ i W som minimerar $\|f - u\|$ är

$$u = \text{Proj}_W(f) = \langle f, w_1\rangle\, w_1 + \langle f, w_2\rangle\, w_2 =$$
$$\int_0^1 x^3 dx + \frac{45}{4}\int_0^1 x^3(x^2 - \frac{1}{3})dx(x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{4} + \frac{15}{16}(x^2 - \frac{1}{3}) = \frac{15}{16}x^2 - \frac{1}{16}.$$

2 (SF1683). Finn en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$y(x) = 2e^x + \int_0^x e^{-t+x} y(t)dt, \quad x \geq 0.$$

Tips: Laplacetransform-tabellen ger: $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$.

Lösning. Ekvationen ovan kan skrivas om som

$$y = 2e^x + e^x * y.$$

Laplacetransformering ger: $Y = 2\mathcal{L}(e^x) + \mathcal{L}(e^x)Y$ där $Y = \mathcal{L}(y)$. Enligt tabellen, $\mathcal{L}(e^x) = \frac{1}{s-1}$. Detta ger: $(s-2)Y = 2$, dvs $Y = \frac{2}{s-2}$. Inverstransformering ger $y = 2e^{2x}$.

2 (SF1629). Bestäm en talföljd (a_n), $n = 0, 1, \ldots$, sådan att $a_0 = 2$ och

$$a_{n+1} - 3a_n = 2^n - 2 \quad \text{för } \; n = 0, 1, \ldots.$$

Lösning. Låt $A(z)$ vara Z-transformen av följden (a_n). Z-transform av den rekurrenta formeln $a_{n+1} - 3a_n = 2^n - 2$, $a_0 = 2$, blir:

$$zA(z) - 2z - 3A(z) = \frac{z}{z-2} - 2\frac{z}{z-1}.$$

Detta ger

$$A(z) = \frac{2z}{z-3} + \frac{z}{(z-3)(z-2)} - \frac{2z}{(z-3)(z-1)}.$$

Partialbråksuppdelning ger:

$$\frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2},$$

och

$$\frac{2}{(z-3)(z-1)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}.$$

Därför kan vi skriva:

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{2z}{z-3} + \frac{z}{z-3} - \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3} + \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{2z}{z-3} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-1}. \end{aligned}$$

Invers Z-tranform ger nu:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

3 a). Beräkna samtliga egenvärden och egenfunktioner till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ f(0) = f'(\pi) = 0. \end{cases}$$

OBS: Motivering av resultatet krävs! Svar utan motivering ger inga poäng.
b). Låt $(\phi_k(x))_{k=0}^{\infty}$ vara egenfunktionerna i a). Är det sant att man kan hitta N och $c_1, \ldots, c_n$ sådana att för funktionen $\psi(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \phi_k(x)$ gäller $\int_0^{\pi} |\sin x - \psi(x)|^2 dx < 0.01$? **1p.**
c). Beräkna **1p.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^{\pi} \sin x \cdot \overline{\phi_k(x)} dx\right)^2}{\int_0^{\pi} |\phi_k(x)|^2 dx}.$$

Lösning. a). För $\lambda > 0$ sätt $\lambda = \omega^2$, $\omega > 0$. Ekvationen blir då $f'' + \omega^2 f = 0$. Den har den allmänna lösningen

$$f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x).$$

Derivering ger

$$f'(x) = -A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x).$$

Randvillkoret $f(0) = 0$ ger $A = 0$, randvillkoret $f'(\pi) = 0$ ger icke triviala lösningar om $\cos(\omega\pi) = 0$. Det sista ger $\omega = 1/2 + n$ där $n = 0, 1, 2, \ldots$. För alla $n = 0, 1, 2, \ldots$ har vi alltså egenvärden $\lambda_n = (1/2 + n)^2$ med motsvarande egenfunktioner $f_n = \cos(1/2 + n)x$. För $\lambda \leq 0$ har randvärdesproblemet ovan bara triviala lösningar (eftersom i dessa fal är den allmänna lösningen antingen en linjär kombination av två exponentiella funktioner eller en linjär funktion; randvärden medför att desa kan bara vara identiskt noll).

b). Enligt Sturm-Liouvilles sats, utgör mängden $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ en fullständig ortogonal mängd i $L_2(0, \pi)$. Per definition, betyder detta att för varje $\epsilon > 0$ (speciellt, för $\epsilon = 0.01$) finns det ett N och konstanter $c_1, \ldots, c_n$ sådana att för funktionen $\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k(x)$ gäller

$$\| \sin x - \psi(x) \|^2 = \int_0^{\pi} | \sin x - \psi(x)|^2 dx < 0.01.$$

c). Enligt Parsevals formel, om $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ är en fullständig ortogonal mängd i ett inreproduktrum V, så gäller för varje $u \in V$:

$$\sum \frac{| \langle u, f_k \rangle |^2}{\|f_k\|^2} = \|f\|^2.$$

I vårt fall ger detta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^{\pi} \sin x \cdot \overline{\phi_k(x)} dx \right)^2}{\int_0^{\pi} |\phi_k(x)|^2 dx} = \int_0^{\pi} | \sin(x)|^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

4 a). Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2, & x > 1. \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution. Beräkna dess derivata i distributionsmening på två sätt: a). genom att skriva om den i termer av Heaviside funktion och b). direkt per definition. Förkorta ditt svar så långt det går.

Lösning. a). Vi kan uttrycka f med hjälp av Heaviside funktion:

$$f(x) = -H(-x) + (x + 2)(H(x) - H(x - 1)) + 2x^2 H(x - 1).$$

Derivering ger:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \delta(x) + (H(x) - H(x-1)) + (x+2)(\delta(x) - \delta(x-1)) + 2x^2\delta(x-1) + 4xH(x-1) \\
&= 3\delta(x) - 3\delta(x-1) + 2\delta(x-1) + (H(x) - H(x-1)) + 4xH(x-1) \\
&= 3\delta(x) - \delta(x-1) + H(x) - H(x-1) + 4xH(x-1).
\end{aligned}
$$

Vi har använt formeln $\phi(x)\delta(x-a) = \phi(a)\delta(x-a)$ som gäller för varje testfunktion.
b). Per definition av derivatan i distributionsmening, för varje testfunktion gäller: $f'[\phi] = -f[\phi']$.

$$
\begin{aligned}
f'(\phi) = -f(\phi') &= -\left(\int_{-\infty}^{0} (-1)\phi'(x)dx + \int_0^1 (x+2)\phi'(x)dx + \int_1^\infty x^2\phi'(x)dx\right) \\
&= -\left(-[\phi(x)]_{-\infty}^0 + [(x+2)\phi(x)]_0^1 - \int_0^1 \phi(x)dx + [2x^2\phi(x)]_1^\infty - 4\int_1^\infty x\phi(x)dx\right) \\
&= \phi(0) - 3\phi(1) + 2\phi(0) + 2\phi(1) + \int_0^1 \phi(x)dx + 4\int_1^\infty x\phi(x)dx \\
&= (3\delta(x) - \delta(x-1) + H(x) - H(x-1) + 4xH(x-1))[\phi(x)].
\end{aligned}
$$

Vi har använt partiell integration samt faktum att för varje testfunktion $\phi(x)$ gäller: $\lim_{x\to\pm\infty} x^2\phi(x) = 0$.

5 a). Betrakta funktionen

$$
f(t) = \begin{cases} \cos t, & |t| \le \pi, \\ 0, & |t| > \pi. \end{cases}
$$

Beräkna Fouriertransformen av f.
Tips: du kan behöva formeln $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
b). Använd resultatet i a) för att beräkna integralen

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \sin^2 \pi\omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega.
$$

Lösning. Eftersom $e^{it\omega} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ and $f(t)$ är en jämn funktion, for vi:

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t(\cos\omega t + i\sin\omega t)d\omega \\
&=2\int_0^\pi \cos\omega t\cos t d\omega = \int_0^\pi \cos(\omega t + t) + \cos(\omega t - t)d\omega \\
&= \left[\frac{\sin(\omega t + t)}{\omega + 1} + \frac{\sin(\omega t - t)}{\omega - 1}\right]_0^\pi \\
&= \left[\frac{\sin(\omega\pi + \pi)}{\omega + 1} + \frac{\sin(\omega\pi - \pi)}{\omega - 1}\right]_0^\pi \\
&= -\left[\frac{\sin(\omega\pi)}{\omega + 1} + \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega - 1}\right]_0^\pi = \frac{2\omega\sin(\omega\pi)}{1-\omega^2}
\end{aligned}
$$

för $\omega \neq \pm 1$. Värden $\hat{f}(\pm 1)$ beräknas separat:

$$\hat{f}(\pm 1) = 2\int_0^\pi \cos^2 t d\omega = \pi.$$

För att lösa b)., använder vi Plancherels formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Den ger oss:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \sin^2(\omega\pi)}{(1-\omega^2)^2} d\omega = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$
$$= \frac{1}{4} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{\pi^2}{2}.$$

6 a). För en funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$ låt $c_n(f)$ beteckna f:s komplexa Fourierkoefficienter. Antag att f är 2π-periodisk, 2 gånger kontinuerligt deriverbar. Uttryck $c_n(f')$ och $c_n(f'')$ genom $c_n(f)$ och n. Motivera! **1p.**
b). Använd Fourierseriemetoden för att bestämma alla 2π-periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara funktioner som uppfyller **2p.**

$$y''(t) = 4y(t - \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c). Ge en kortfattat beskrivning (2-4 meningar) av Gibbs fenomenet (beskrivningen skall vara riktad till en person som kan definitionen av Fourierserier). **1p.**
Lösning. a). Man kan visa att $c_n(f') = inc_n(f)$, $c_n(f') = -n^2 c_n(f)$; bevis—se sid. 84-85 i boken.
b). Eftersom både y, y' och y'' är 2 gånger kontinuerligt deriverbara, så konvergerar deras Fourierserier till motsvarande funktioner i alla punkter. Representera $y(t)$ i Fourierserie: $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$. Då har vi $y''(t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 c_n e^{int}$. Ekvationen ger:

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 c_n e^{int} = 4\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t-\pi/2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (-i)^n e^{int},$$

i det sista steget använde vi relationen $e^{-i\pi/2} = -i$. Jämförelse av koefficienter vid samma grad av e^{int} ger för varje $n \in \mathbb{Z}$:

$$-n^2 c_n = 4(-i)^n c_n \;\Leftrightarrow c_n(n^2 + 4(-i)^n) = 0.$$

För varje fixerad n innebär detta att antingen $c_n = 0$, eller $n^2 + 4(-i)^n = 0$ och c_n får väljas godtyckligt. Relationen $n^2 + 4(-i)^n = 0$ är uppfylld om och endast om $n = \pm 2$. Alltså beskrivs alla lösningar till ekvationen ovan av formeln

$$y = c_2 e^{2it} + c_{-2} e^{-2it}$$

där $c_{\pm 2}$ är godtyckliga konstanter.

c). Gibbs fenomenet beskriver beteendet av partiella summor av Fourierserien till en styckvis kontinuerligt deriverbar funktion kring diskontinuitetspunkter. Det visar sig att partiella summorna S_n konvergerar, men har en viss överslag, vars absolutbelopp är större än någon konstant för alla n.