KTH, Matematik
Maria Saprykina

Lösningsförslag till tentamen i SF1683, Differentialekvationer och Transformmetoder (del 2) 8 januari 2018

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.
Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Använd separation av variabler för att lösa randvärdesproblemet

$$u_x(x,y) = u_y(x,y) + u(x,y), \quad u(x,0) = 4e^{-2x} + 5e^{3x}.$$

Lösning. Vi söker lösningar på formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Insättninng i ekvationen ger:

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y) + X(x)Y(y).$$

Dividera med $X(x)Y(y)$ (vi antar att denna faktor är skilld från 0):

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} + 1 := \lambda$$

där λ är en (godtycklig) konstant, eftersom HL i likheten är oberoende av y, och VL är oberoende av x. Detta ger oss ett system av ordinera differentialekvationer:

$$\begin{cases} X'(x) = \lambda X(x) \\ Y'(y) = (\lambda - 1)Y(y). \end{cases}$$

För varje λ ges dess lösning av

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y}. \end{cases}$$

Produkten $u(x,y) = Ce^{\lambda x + (\lambda-1)y}$ är alltså en lösning till den ursprungliga ekvationen (för valfri konstant C). Även linjära kombinationer på formen

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{N} C_j e^{\lambda_j x + (\lambda_j - 1)y}$$

är lösningar till samma ekvation (för valfria konstanter $N \in \mathbb{N}$ och $\lambda_j,\ C_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$).

Om $u(x,0) = 4e^{-2x} + 5e^{3x}$, så har vi $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $C_1 = 4$, $C_2 = 5$, och den sökta lösningen är

$$u(x,y) = 4e^{-2x-3y} + 5e^{3x+2y}.$$

2. Låt $H(t)$ vara Heaviside funktion, dvs

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0, \\ 1 & \text{för } t \geq 0. \end{cases}$$

Beteckna $H_c(t) = H(t-c)$.

Laplacetransformen definieras av

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Tabellen i [BdP] ger:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

a). Visa att $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$. **1p.**

Lösning. Se Theorem 6.3.1 i kursboken [BdP] eller [BdPM]. Direkt uträkning:

$$\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty H_c(t)f(t-c)e^{-st}dt = \int_c^\infty f(t-c)e^{-st}dt.$$

Variabelbytet $x = t - c$ ger svaret.

b). Använd Laplacetransform-metoden för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 9y = f(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

där $f(t) = \sin t$ för $0 \leq t < 2\pi$, and $f(t) = 0$ annars.

Lösning. Funktionen ovan kan skrivas som

$$f(t) = \sin t(H_0(t) - H_{2\pi}(t)) = H_0(t)\sin t - H_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)$$

(vi har använt att $\sin t = \sin(t-2\pi)$). Laplace-transformerar ekvationen:

$$s^2Y(s) + 9Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}(1-e^{-2\pi s}).$$

Detta ger

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}(1-e^{-2\pi s}) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{3}{s^2+9}\right)(1-e^{-2\pi s}).$$

Inverstransformering ger (för $t \geq 0$):

$$y(t) = \frac{1}{8}\left(\sin t - H_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)\right) - \frac{1}{24}\left(\sin 3t - H_{2\pi}(t)\sin 3(t-2\pi)\right).$$

3. a). Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{för } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{för } 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

utvecklas i en sinus-serie $S(x)$ på intervallet $[0,\pi]$. Ange $S(1)$, $S(2)$ och $S(\pi)$. Formulera satsen som du har använt.

Lösning. Låt oss definiera funktionen $\tilde{g}$ på följande sätt:

$\tilde{g}(x) = g(x)$ för alla $x \in [0, 1]$,
$\tilde{g}$ är udda på intervallet $(-\pi, \pi)$,
$\tilde{g}$ är 2π-periodisk på $\mathbb{R}$.

Den nya funktionen $\tilde{g}$ kan utvecklas till en Fourier-serie $S(x)$, och denna serie är en sinus-serie (dvs alla dess termer har form $c_n \sin nx$). Enligt sats 4.5 i Vretblads bok (Formulering krävs!),

$$S(x) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x_-) + \tilde{g}(x_+)).$$

Vi beräknar: $S(1) = \frac{1}{2}(g(1_-) + g(1_+)) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$,
$S(2) = \frac{1}{2}(g(2_-) + g(2_+)) = \frac{1}{2}(3 + 3) = 3$ (serien konvergerar till funktionen i funktionens kontinuitetskunkter);
$S(\pi) = \frac{1}{2}(\tilde{g}(x_-) + \tilde{g}(x_+)) = \frac{1}{2}(3 - 3) = 0$.

b). Låt f vara en kontinuerlig 2π-periodisk funktion som uppfyller $f(x + \pi) = f(x)$ för $x \in [-\pi, \pi]$. Visa att alla de udda Fourierkoefficienterna av f är noll, dvs $c_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lösning. Foureier-serien av f har form $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx}$ där

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-inx}(1 + e^{-in\pi})dx.$$

Om n är udda, har vi $1 + e^{-in\pi} = 0$, och därför är $c_n = 0$.

4. Fouriertransformen definieras av $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$.
a). Bevisa skalningsformeln för Fouriertransform: **1p.**

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \quad a > 0.$$

Lösning. För $x = at$ har vi:

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega/a)t}dx = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \quad a > 0.$$

b). Tabellen för Fourier-transformer i [V] ger: $\mathcal{F}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}] = e^{-\omega^2/2}$. Använd Fourier-transform för att lösa **3p.**

$$e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(t-x)^2} f(x)dx$$

Lösning. Planen är att Fourier-transformera ekvationen. Vi kan tolka integralen i högerled som faltning

$$e^{-4t^2} * f(t)$$

och använda att

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g].$$

Vi ska behöva transformera funktioner på formen $f(t) = e^{-kt}$, $k > 0$. Från formeln ovan samt skallningsformeln följer:

$$\mathcal{F}[e^{-kt^2}] = \mathcal{F}[e^{-(\sqrt{2k}t)^2/2}] = \sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2k}}e^{-(\omega/\sqrt{2k})^2/2} = \sqrt{(\pi/k)}e^{-\omega^2/(4k)}.$$

Med denna formeln får vi:

$$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}, \quad \mathcal{F}[e^{-4t^2}] = \sqrt{(\pi/4)}e^{-\omega^2/16}.$$

Fourier-transformerar ekvationen:

$$\sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4} = \sqrt{(\pi/4)}e^{-\omega^2/16}\mathcal{F}[f].$$

Det följer att

$$\mathcal{F}[f] = 2e^{-3\omega^2/16},$$

och inverstransformen (med $k = 4/3$) ger

$$f(t) = \frac{4}{\sqrt{(3\pi)}}e^{-4t^2/3}.$$

5. a). Vad menas med att $(\phi_n)_n$ utgör en fullständig ON mängd i ett inre produktrum V? **1p.**

Lösning. En följd av funktioner $(\phi_n)_n$ utgör en fullständig mängd i ett inre produktrum V om för varje $u \in V$ och varje $\varepsilon > 0$ finns en linjär kombination $\sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n$ sådan att

$$\left\| u - \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n \right\| < \varepsilon.$$

Mängden är ON (ortonormerad) om funktionerna ϕ_n uppfyller:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

b). Formulera Parsevals formel (som relaterar normen av funktionen till dess Fourierkoefficienter); **1p.**

Lösning. Om $(\phi_n)_n$ är en fullständig ON mängd i ett inre produktrum V, och $u \in V$ har Fourier-koefficienter $c_n = \langle u, \phi_n \rangle$, så

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, \phi_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

c). Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion, och

$$\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Använd $b)$ för att visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [-1, 1]$.

Lösning. Vi vet att mängden av Legendre-polynom P_n, $(n = 0, \dots)$ utgör en fullständig ortogonal mängd i rummet av kontinuerliga funktioner med inre produkt

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{\phi(x)}dx.$$

Antagandet i uppgiften medför att

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n dx = \langle f, P_n \rangle = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Enligt Parsevals formel, $\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = 0$. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig, medför detta att $f(x)$ är identiskt lika med 0.

6. a). Verifiera enligt definition att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ för } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ annars,} \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution enligt formeln $f[g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$. **1p.**

Lösning. Vi säger att en funktion ϕ tillhör Schwartz klass $\mathcal{S}$ om ϕ har derivator av alla ordningar och för alla icke-negativa heltal n, k finns konstant $C_{n,k}$ sådan att för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller

$$(1 + |x|)^n |\phi^{(k)}(x)| \leq C_{n,k}.$$

En följd av funktioner ϕ_j, $j = 1, 2, \dots$, konvergerar i $\mathcal{S}$ till en funktion $\psi \in \mathcal{S}$ om för alla icke-negativa heltal n, k gäller:

$$\lim_{j\to\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\phi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| = 0.$$

En tempererad distribution är en linjär kontinuerlig avbildning från Schwartz klass till $\mathbb{C}$.

Vi verifierar att f definierar en tempererad distribution. Först, om $\phi \in \mathcal{S}$, så är ϕ kontinuerlig, och $f[\phi] = \int_0^1 x\phi(x)dx$ är definierad.

Sedan, $f[c_1\phi_1 + c_2\phi_2] = \int_0^1 x(c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x))dx = c_1 f[\phi_1] + c_2 f[\phi_2]$, alltså är funktionalen linjär.

Antag att en följd funktioner $\phi_j \in \mathcal{S}$ konvergerar i $\mathcal{S}$ till $\psi \in \mathcal{S}$. Då

$$|f[\phi_j] - f[\psi]| = |\int_0^1 x(\phi_j(x) - \psi(x))dx| \leq \max_{x\in[0,1]} |\phi_j(x) - \psi(x)| \to 0$$

då $j \to 0$, och det betyder att avbildningen ovan är kontinuerlig.

b). Beräkna f' i distributionsmening. Förkorta så långt som möjligt. **2p.**

Lösning. Vi uttrycker f i termer av Heaviside funktionen:

$$f(x) = x(H(x) - H(x-1)).$$

Vi får $f'(x) = H(x) - H(x-1) + x\delta(x) - x\delta(x-1) = H(x) - H(x-1) - \delta(x-1)$. I sista steget har vi använt formeln

$$g(x)\delta(x-a) = g(a)\delta(x-a).$$

c). Beräkna värdet av $f'[e^{-x^2}]$. Svaret skall inte innehålla intergraler. **1p.**

Lösning. Enligt definitionen,

$$f'[e^{-x^2/2}] = -f[(e^{-x^2/2})'] = -f[-xe^{-x^2}] = \int_{-1}^{1} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Det har tyvärr uppstått ett fel i uppgiftformuleringen, och denna integral går inte att beräkna med enkla metoder. Alla försök kommer att belönas.