KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen i SF1683,
Differentialekvationer och Transformmetoder (del 2)
4 april 2018

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.
Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Betrakta rummet $C([0,1])$ (rummet av alla kontinuerliga, komplexvärda funktioner definierade på intervallet $[0,1]$) med den inre produkten

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

a). Låt W vara delrummet av $C([0,1])$ som spänns upp av funktionerna $u_1(x) = 1$ och $u_2 = x^2$. Bestäm en ON-bas för W.

b). Låt $f(x) = x^3$. Bestäm den funktion (vektor) $u(x)$ i W som minimerar $\|f - u\|$.

2. Finn en lösning $y(x)$ till integralekvationen

$$y(x) = 2e^x + \int_0^x e^{-t+x} y(t)dt, \quad x \geq 0.$$

Tips: Laplacetransform-tabellen ger: $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$, $s > a$.

3 a). Beräkna samtliga egenvärden till Sturm-Liouvilleproblemet

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0, & 0 < x < \pi, \\ f(0) = f'(\pi) = 0, \end{cases}$$

och bestäm en egenfunktion för varje egenvärde.

OBS: Motivering av resultatet krävs! Svar utan motivering ger inga poäng.

b). Låt $(\phi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ vara egenfunktionerna i a). Är det sant att man kan hitta N och $c_1, \ldots, c_n$ sådana att för funktionen $\psi(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \phi_k(x)$ gäller $\int_0^{\pi} |\sin x - \psi(x)|^2 dx < 0.01$? **1p.**

c). Beräkna **1p.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\int_0^{\pi} \sin x \cdot \overline{\phi_k(x)} dx\right)^2}{\int_0^{\pi} |\phi_k(x)|^2 dx}.$$

Vänd!

4 a). Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ x+2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution. Beräkna dess derivata i distributionsmening på två sätt: a). genom att skriva om den i termer av Heaviside funktion och b). direkt per definition. Förkorta ditt svar så långt det går.

5 a). Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

Beräkna Fouriertransformen av f.
Tips: du kan behöva formeln $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \sin(a+b)$.

b). Använd resultatet i a) för att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 \sin^2 \pi\omega}{(\omega^2-1)^2} d\omega.$$

6 a). För en funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$ låt $c_n(f)$ beteckna f:s komplexa Fourierkoefficienter. Antag att f är 2π-periodisk, 2 gånger kontinuerligt deriverbar. Uttryck $c_n(f')$ och $c_n(f'')$ genom $c_n(f)$ och n. Motivera! **1p.**
b). Använd Fourierseriemetoden för att bestämma alla 2π-periodiska, 4 gånger kontinuerligt deriverbara funktioner som uppfyller **2p.**

$$y''(t) - 4y(t - \pi/2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c). Ge en kortfattat (2-4 meningar, inte längre) beskrivning av Gibbs fenomenet. Beskrivningen skall vara riktad till en person som kan definitionen av Fourierserier. **1p.**