KTH, Matematik
Maria Saprykina

Tentamen, SF1683, Differentialekvationer och Transformmetoder (del 2)
08 januari 2018 kl. 08:00-12:00

Tentamen består av sex uppgifter där vardera uppgift ger maximalt fyra poäng.
Preliminära betygsgränser: A–21 poäng, B–19, C–16, D–13, E–11, Fx–10.
Det finns möjlighet att komplettera betyget Fx inom 4 veckor. Kontakta i så fall Maria Saprykina.
Inga hjälpmedel är tillåtna vid tentamen.
OBS: För full poäng krävs fullständiga, tydligt presenterade och välmotiverade lösningar som är lätta att följa. Markera dina svar tydligt.

1. Använd separation av variabler för att lösa randvärdesproblemet

$$u_x(x,y) = u_y(x,y) + u(x,y), \quad u(x,0) = 4e^{-2x} + 5e^{3x}.$$

2. Låt $H(t)$ vara Heaviside funktion, dvs

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0, \\ 1 & \text{för } t \geq 0. \end{cases}$$

Beteckna $H_c(t) = H(t-c)$.

Laplacetransformen definieras av

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Tabellen i [BdP] ger:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$$

a). Visa att $\mathcal{L}\{H_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}$. **1p.**

b). Använd Laplacetransform-metoden för att lösa begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 9y = f(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

där $f(t) = \sin t$ för $0 \leq t < 2\pi$, and $f(t) = 0$ annars.

3. a). Funktionen

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{för } 0 < x \leq 1, \\ 3 & \text{för } 1 < x \leq \pi \end{cases}$$

utvecklas i en sinus-serie $S(x)$ på intervallet $[0,\pi]$. Ange $S(1)$, $S(2)$ och $S(\pi)$. Formulera satsen som du har använt.

b). Låt f vara en kontinuerlig 2π-periodisk function som uppfyller $f(x+\pi) = f(x)$ för $x \in [-\pi,\pi]$. Visa att alla de udda Fourierkoefficienterna av f är noll, dvs $c_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vänd!

4. Fouriertransformen definieras av $\mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$.

   a). Bevisa skalningsformeln för Fouriertransform: **1p.**

   $$\mathcal{F}[f(at)](w) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \quad a > 0.$$

   b). Tabellen för Fourier-transformer i [V] ger: $\mathcal{F}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}] = e^{-\omega^2/2}$. Använd Fourier-transform för att lösa **3p.**

   $$e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4(t-x)^2} f(x)dx$$

5. a). Vad menas med att $(\phi_n)_n$ utgör en fullständig ON mängd i ett inre produktrum V? **1p.**

   b). Formulera Parsevals formel (som relaterar normen av funktionen till dess Fourierkoefficienter); **1p.**

   c). Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion, och

   $$\int_{-1}^{1} f(x)x^n dx = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   Använd $b)$ för att visa att $f(x) = 0$ för alla $x \in [-1, 1]$.

6. a). Verifiera enligt definition att funktionen

   $$f(x) = \begin{cases} x \text{ för } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \text{ annars,} \end{cases}$$

definierar en tempererad distribution enligt formeln $f[g] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$. **1p.**

   b). Beräkna f' i distributionsmening. Förkorta så långt som möjligt. **2p.**

   c). Beräkna värdet av $f'[e^{-x^2}]$. Svaret skall inte innehålla intergraler. **1p.**

Lycka till!